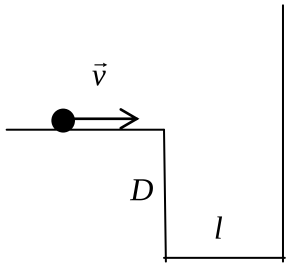
21. REPUBLIČKO TAKMIČENJE IZ FIZIKE UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA REPUBLIKE SRPSKE (5. april 2014)

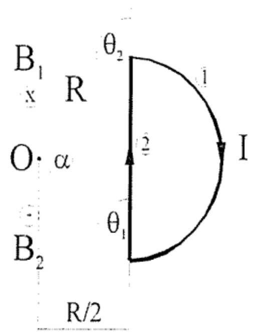
III **RAZRED**

1. Kuglica prečnika $d = 1\,\text{cm}$ i brzine $v = 1\,\text{m/s}$ upada u jamu savršeno glatkih zidova duboku $D = 45\,\text{cm}$ i široku $l = 7\,\text{cm}$. Odrediti broj sudara kuglice sa zidovima prije njenog pada na dno jame. Sudari sa zidovima su savršeno elastični.

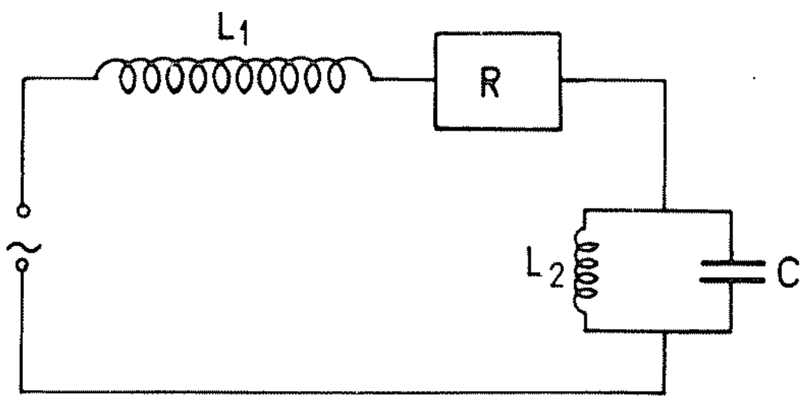


2. Časovnici, čija klatna osciluju sa periodom od T=1 s, na površini Zemlje rade tačno. Koliko ovi časovnici zaostaju za t = 24 h ako se:
a) podignu na visinu od $h = 200\,\text{m}$,
b) spuste u okno dubine $h = 200\,\text{m}$?
Pretpostaviti da je Zemlja homogena sfera poluprečnika $R = 6{,}37 \cdot 10^6\,\text{m}$.

3. Data je strujna kontura oblika kao na slici. Odrediti vektor (pravac, smjer i intenzitet) magnetne indukcije u tački O. Struja I i poluprečnik R su zadani (poznati).



4. Na izvor naizmjeničnog napona priključeno je kolo predstavljeno na slici. Frekvencija izvora je $\nu = 10^3/2\pi\ \text{Hz}$. Induktiviteti kalema su $L_1 = L_2 = 1\,\text{mH}$. Otpor je $R = 1\Omega$.
a) Koliki treba da bude kapacitet kondenzatora da kroz kolo protiče maksimalna struja?
b) Ako se za ovu vrijednost kapaciteta frekvencija udvostruči, a L_2 smanji na četvrtinu prvobitne vrijednosti, kolika će biti fazna razlika između struje i napona? Termogene otpore zanemariti.



$\nu=10^3/2\pi$ Hz , $L_1= L_2=1\text{mH}=10^{-3}\text{H}$, $R=1\Omega$

5. Monohromatska svjetlost talasne duжine $\lambda = 600\,\text{nm}$ propyštena je kroz difrakcionu rešetku koja ima 500 zareza na 0,01 m dužine. Na rastojanju $d = 0{,}8\,\text{m}$ od rešetke je zaklon od mutnog stakla. Dvije susjedne linije posmatraju se lupom žиžne daljine $f = 0{,}12\,\text{m}$. Koliko ħe iznositi rastojanje vertikalnih linija koje posmatrač vidi kroz lupu ako je daljina jasnog vida 0,25 m? Svjetlost pada normalno na rešetku.

RJEŠENJA

1.

Pri sudarima dolazi samo do promjene smjera horizontalne komponente brzine kuglice, koja po intenzitetu ostaje ista tokom cijelog padanja. Vertikalna komponenta brzine se ne mijenja tokom sudara. S obzirom da je vertikalna komponenta početne brzine jednaka nuli, vrijeme padanja kuglice je

$$t = \sqrt{\frac{2D}{g}}\ .$$

Vrijeme kretanja kuglice do prvog sudara je

$$t_0' = \frac{l - d/2}{v}\ ,$$

a vrijeme kretanja između dva sudara je

$$t' = \frac{l - d}{v}\ .$$

U vremenu $t - t_0'$ broj sudara biće jednak *najvećem cijelom broju* od izraza

$$\frac{t - t_0'}{t'} = \frac{v}{l-d}\sqrt{\frac{2D}{g}} - \frac{l - d/2}{l-d}\ .$$

Najveći cijeli broj broja

$$\frac{1\text{m/s}}{0{,}07\,\text{m} - 0{,}01\,\text{m}}\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}45\,\text{m}}{9{,}81\,\text{m/s}^2}} - \frac{7\,c\text{m} - 0{,}5\,c\text{m}}{7\,c\text{m} - 1c\text{m}} = 5{,}05 - 1{,}08 = 3{,}97\ .$$

je 3, pa je ukupan broj sudara jednak 4.

Napomena: Približno se može uzeti da je $t_0' \approx t'$, ali bi tada broj sudara bio najveće cijelo od 5,05 tj. 5, što je netačno.

2.

a) Na površini Zemlje period oscilovanja klatna je

$$T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

Na visini *h* iznad Zemlje period oscilovanja klatna je

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g_1}}\ .$$

Broj oscilacija za dvadeset i četiri sata je

$$N_1 = 24 \cdot 60 \cdot 60 \cdot \frac{1}{T_1} = \frac{k}{T_1}$$

gdje je k=86400.

Na visini h iznad Zemlje časovnici zaostaju za 24h za vrijeme:

$$\Delta t = N_1 (T_1 - T_0) = \frac{k}{T_1}(T_1 - T_0) = k\left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right).$$

Odnos perioda oscilovanja klatna je

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}} = \sqrt{\frac{g_1}{g}}\ .$$

gdje je

$$g = \gamma\frac{M}{R^2} \text{ i } g_1 = \gamma\frac{M}{(R+h)^2}\ .$$

Sada je odnos perioda oscilovanja klatna

$$\frac{T_0}{T_1} = \sqrt{\frac{\frac{\gamma M}{(R+h)^2}}{\frac{\gamma M}{R^2}}} = \frac{R}{R+h}$$

Časovnici zaostaju za vrijeme,

$$\Delta t_1 = k\left(1 - \frac{R}{R+h}\right) = k\left(\frac{R+h-R}{R+h}\right) = \frac{kh}{R+h} = \frac{86400 \cdot 200}{6370000 + 200} = 2{,}71\text{s}\ .$$

b) Ako su časovnici spušteni u okno, onda su ubrzanja:

$$g=\gamma\frac{M}{R^2}$$
$$g_2=\gamma\frac{M_2}{(R-h)^2}$$
$$M=\rho\cdot V$$
$$M_2=\rho\cdot V_2$$
$$V=\frac{4}{3}R^3\pi$$
$$V_2=\frac{4}{3}(R-h)^3\pi$$

Sada su ubrzanja,

$$g=\gamma\frac{4}{3}R^3\pi\rho\frac{1}{R^2}=\gamma\frac{4}{3}R\pi\rho$$
$$g_2=\gamma\frac{4}{3}(R-h)^3\pi\rho\frac{1}{(R-h)^2}=\gamma\frac{4}{3}(R-h)\pi\rho$$

Odnos perioda oscilovanja klatna je

$$\frac{T_0}{T_2}=\sqrt{\frac{g_2}{g}}=\sqrt{\frac{\gamma\frac{4}{3}(R-h)\pi\rho}{\gamma\frac{4}{3}R\pi\rho}}=\sqrt{\frac{R-h}{R}}=\sqrt{\frac{6370000m-200m}{200m}}=0{,}9999843$$

Sada časovnici zaostaju za vrijeme:

$$\Delta t_2=k\left(1-\frac{T_0}{T_2}\right)=86400\cdot(1-0{,}9999843)=86400\cdot0{,}0000157=1{,}36\,\mathrm{s}$$

3.

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{R}{2}}{R}=\frac{R}{2}\cdot\frac{1}{R}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=\arccos\frac{1}{2}=60^0$$
$$\alpha=2\cdot60^0=120^0$$

Savijeni dio konture predstavlja, dakle, jednu trećinu kružnice.

$$B_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi \frac{R}{2}} \left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2 \right)$$

$$\cos\theta_1 = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\theta_2 = \cos 150^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I \sqrt{3}}{2\pi R}$$

$$B = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 I \sqrt{3}}{2\pi R} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\pi} - \frac{1}{3} \right)$$

Vektor $\vec{B}$ ima pravac normalan na ravan crteža, a smjer mu je iz ravni tj. υ.

4.
Impedanca kola je

$$Z^2 = R^2 + (X_1 + X_e)^2$$

$X_1 = \omega L_1$
X_e-ekvivalentni reaktivni otpor paralelne veze.
Kako je napon svakog elementa paralelne veze isti, struja kroz kolo sa kondenzatorom prethodi naponu za $\pi/2$, a kroz zavojnicu zaostaje za istu vrijednost u odnosu na napon, pa je ukupna struja koja teče kroz dio kola R i L_1 data relacijom

$$I = I_C - I_{L_2} = \frac{U}{X_C} - \frac{U}{X_{L_2}} \quad (za \quad X_{L_2} > X_C)$$

$$X_{L_2} = \omega L_2 \wedge X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$I = \frac{\omega^2 L_2 \cdot C - 1}{\omega L_2} \cdot U$$

Ekvivalentni otpor

$$X_e = \frac{U}{I} = \frac{\omega L_2}{\omega^2 L_2 C - 1}$$

Reaktivni otpor cijelog kola iznosi

$$X = X_1 + X_e = \frac{\omega^2 L_1 L_2 C - (L_1 + L_2)}{\omega^2 L_2 C - 1} \cdot \omega$$

a) Maksimalna struja će teći pod uslovom da je impedancija minimalna tj.jednaka nuli.

Iz uslova X=0 imamo jednačinu

$$L_1 + L_2 - \omega^2 L_1 L_2 C = 0$$

Imamo

$$L_1=L_2=L \text{ i } \omega=\omega_0$$

Dobijamo jednačinu

$$2L - \omega_0^2 L^2 C = 0$$
$$C = \frac{2}{\omega_0^2 L}$$
$$\omega_0 = 2\pi\nu = 10^3 \text{ Hz}$$
$$C = 2 \cdot 10^{-3} \text{F}$$

b) Ako je $\omega=2\omega_0$, $L_1=L$, $L_2=L/4$
Imamo

$$X = \frac{3}{2}\omega_0 L = \frac{3}{2} 2\pi\nu L = 3\pi\nu L = 1{,}5\Omega .$$

Fazni ugao dobijamo iz relacije

$$tg\varphi = \frac{X}{R} \Rightarrow tg\varphi = \frac{1{,}5\Omega}{1\Omega} = 1{,}5$$
$$\varphi = arctg 1{,}5 = 56{,}3^0$$

5.
Rastojanje između difrakcionih zareza se dobija iz izraza

$$\lambda = \frac{\Delta S \cdot a}{d} \Rightarrow \Delta S = \frac{\lambda \cdot d}{a}$$

gdje je a konstanta rešetke

$$a = \frac{0{,}01\text{m}}{500} = 0{,}00002\,\text{m} = 2 \cdot 10^{-5}\,\text{m}$$

Rastojanje difrakcionih zareza je

$$\Delta S = \frac{6 \cdot 10^{-7}\,\text{m} \cdot 0{,}8\,\text{m}}{2 \cdot 10^{-5}\,\text{m}} = 0{,}024\,\text{m}$$

Lik je virtuelan pa udaljenost lupe od mutnog stakla računamo pomoću jednačine

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$$

gdje je l daljina jasnog lika

$$p = \frac{l \cdot f}{l + f} = \frac{0{,}25\,\mathrm{m} \cdot 0{,}12\,\mathrm{m}}{0{,}25\,\mathrm{m} + 0{,}12\,\mathrm{m}} = \frac{0{,}03\,\mathrm{m}^2}{0{,}37\,\mathrm{m}} = 0{,}081\,\mathrm{m}\,.$$

Kako imamo izraz za uvećanje lupe koristimo taj izraz za računanje rastojanja vertikalnih linija koje posmatrač vidi

$$\frac{L}{\Delta S} = \frac{l}{p} \Rightarrow L = \Delta S \cdot \frac{l}{p} = 0{,}024\,\mathrm{m} \cdot \frac{0{,}25\,\mathrm{m}}{0{,}081\,\mathrm{m}} = 0{,}074\,\mathrm{m}\,.$$